TITLE:

特殊な確率計画問題に対する主双対内点法 (数理最適化から見た「凸性の深み,非凸性の魅惑」)

AUTHOR(S):

小崎, 敏寛; 水野, 眞治

CITATION:

小崎, 敏寛 ...[et al]. 特殊な確率計画問題に対する主双対内点法 (数理最適化から見た「凸性の深み,非凸性の魅惑」). 数理解析研究所講究録 2004, 1349: 166-176

ISSUE DATE:

2004-01

URL:

http://hdl.handle.net/2433/24868

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録 1349 巻 2004 年 166-176

特殊な確率計画問題に対する主双対内点法

東京工業大学 社会理工学研究科　小崎　敏寛*(Toshihiro KOSAKI)
水野　眞治†(Shinji MIZUNO)
Tokyo Institute of Technology

2003年12月15日

概要

確率計画問題に現れる特殊な構造を持つ大規模な線形計画問題を扱う．この線形計画問題では，係数行列の右上部分が0行列であり，その右下部分が対角行列となっている．この特殊構造を利用する主双対内点法を提案し，その反復回数が一般の主双対内点法に比べ少なくなることを示す．

Keyword: 内点法，センターパス，双対定理，確率計画問題

1　はじめに

内点法は，1984年に Karmarkar [2] によって提案され，その後爆発的に研究されている．現在では，大規模な線形計画問題を解く，標準的な解法として多くのパッケージソフトに内点法が採用されている．内点法の中で，最もよく使われているのは，Kojima, Mizuno and Yoshise [3] によって提案された主双対内点法である．

不確実な状況下での最適化を扱うものとして，確率計画問題がある．確率計画問題は，不確実性を詳細に記述しようとすると問題が複雑・大規模になり，解くことが困難になるという欠点をもつ．しかし，大規模になっても問題の特殊な構造を利用することで計算時間の短縮をはかることができる．

不確実性を表現するにはさまざまな方法があるが，ここでは有限個のシナリオからなる２期間の確率計画問題を扱う．このような問題は，特殊な構造を持った大規模な線形計画問題に定式化することができる．本論では，その問題の特徴を利用した主双対内点法を提案する．提案するアルゴリズムの特徴は，構造のない同程度の問題に適用した場合に比べ，反復回数を減少できることにある．

*kosaki@me.titech.ac.jp, 〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-21-1
†mizuno@me.titech.ac.jp, 〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-21-1

2節では，確率計画問題を説明し，その最適条件を示す．3節では，その問題に対するアルゴリズムを提案する．提案したアルゴリズムの解析を4節で行う．5節において，得られた結果をまとめる．

2 問題

2.1 確率計画問題

ここでは，有限個のシナリオからなる，2段階の確率計画問題を考える．シナリオの数を N とすれば，そのような確率計画問題は，次の線形計画問題と等価になる．

$$
\begin{array}{llllll}
\min & c^Tx & +p_1q_1^Ty_1 & +p_2q_2^Ty_2 & +\cdots & +p_Nq_N^Ty_N & \\
\text{s.t} & Ax & & & & & = b, \\
 & T_1x & +W_1y_1 & & & & = h_1, \\
 & T_2x & & +W_2y_2 & & & = h_2, \\
 & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
 & T_Nx & & & & +W_Ny_N & = h_N, \\
 & x \geq 0, & y_1 \geq 0, & y_2 \geq 0, & \cdots & y_N \geq 0. &
\end{array} \tag{1}
$$

この問題については，たとえば文献[1]を参照すること．ここで，$x \in R^n$ は現時点（一期）での決定変数であり，$y_i \in R^{n'}$ はシナリオ i が起きたときの二期の決定変数である．$p_i \in R$ は，シナリオ i の生起確率を表し，$c \in R^n$, $q_i \in R^{n'}$, A, T_i, W_i, $b \in R^m$, $h_i \in R^{m'}$ は，目的関数あるいは制約条件式を表すためのデータである．

上の問題(1)において，$x_1 = x$, $x_2^T = (y_1^T, y_2^T, \cdots, y_N^T)$, $c_1 = c$, $c_2^T = (p_1q_2^T, p_2q_2^T, \cdots, p_nq_n^T)$, $A_1 = A$, $b_1 = b$,

$$
A_2 = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} W_1 & & & \\ & W_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & W_N \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix}
$$

とすれば，問題(1)は

$$
\begin{array}{llll}
\min & c_1^Tx_1 & +c_2^Tx_2, & \\
\text{s.t.} & A_1x_1 & & = b_1, \\
 & A_2x_1 & +A_3x_2 & = b_2, \\
 & (x_1, & x_2) \geq 0, &
\end{array} \tag{2}
$$

と書き換えることができる．ここで，$n_1 = n$, $n_2 = n'N$, $m_1 = m$, $m_2 = m'N$ とすれば，x_1 と c_1 は n_1 次元のベクトル，x_2 と c_2 は n_2 次元のベクトル，b_1 は m_1 次元のベクトル，b_2 は m_2 次元のベクトルであり，行列 A_1, A_2, A_3 はそれぞれ対応するサイズの行列である．

さらに，$x^T = (x_1^T, x_2^T)$, $c^T = (c_1^T, c_2^T)$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

とすれば，上の問題 (2) は次の標準形の線形計画問題として表すことができる．

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x, \\ \text{s.t.} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

問題 (2) を主問題とすると，その双対問題は

$$\begin{array}{llllll} \max & b_1^T y_1 & +b_2^T y_2, & & & \\ \text{s.t.} & A_1^T y_1 & +A_2^T y_2 & +s_1 & = c_1, & \\ & & A_3^T y_2 & +s_2 & = c_2, & \\ & & (s_1, s_2) & \geq 0, & & \end{array} \tag{3}$$

となる．ただし変数は $(y_1, y_2, s_1, s_2) \in R^{m_1+m_2+n_1+n_2}$ である．主問題と双対問題のペアの実行可能領域は

$$\mathcal{F} := \left\{ (x_1, x_2, y_1, y_2, s_1, s_2) : \begin{array}{lllll} A_1 x_1 & & & = b_1, \\ A_2 x_1 & +A_3 x_2 & & = b_2, \\ A_1^T y_1 & +A_2^T y_2 & +s_1 & = c_1, \\ & A_3^T y_2 & +s_2 & = c_2, \\ & (x_1, x_2, s_1, s_2) & \geq 0 & \end{array} \right\}$$

であり，その実行可能内点の集合は

$$\mathcal{F}^0 := \{(x_1, x_2, y_1, y_2, s_1, s_2) \in \mathcal{F} : (x_1, x_2, s_1, s_2) > 0\}$$

である．線形計画問題の主問題と双対問題に内点が存在する，すなわち，集合 $\mathcal{F}^0$ が空ではないと仮定する．

2.2 最適条件

問題 (2) に最適解 (x_1, x_2) が存在するとすれば，双対問題 (3) に最適解 (y_1, y_2, s_1, s_2) が存在し，条件

$$\begin{array}{lllcl} A_1 x_1 & & & = & b_1, \\ A_2 x_1 & +A_3 x_2 & & = & b_2, \\ A_1^T y_1 & +A_2^T y_2 & +s_1 & = & c_1, \\ & A_3^T y_2 & +s_2 & = & c_2, \\ X_1 s_1 & & & = & 0, \\ & X_2 s_2 & & = & 0 \\ & (x_1, x_2, s_1, s_2) & \geq 0 & & \end{array}$$

をみたす．逆に，(x_1, x_2) と (y_1, y_2, s_1, s_2) が上記の条件をみたせば，それらはそれぞれ主問題と双対問題の最適解となる．

パラメータ $\mu > 0$ に対して，上の最適条件を少し変更した条件

$$\begin{array}{lllcl} A_1 x_1 & & & = & b_1, \\ A_2 x_1 & +A_3 x_2 & & = & b_2, \\ A_1^T y_1 & +A_2^T y_2 & +s_1 & = & c_1, \\ & A_3^T y_2 & +s_2 & = & c_2, \\ X_1 s_1 & & & = & \mu e_1, \\ & X_2 s_2 & & = & \mu e_2 \\ & (x_1, x_2, s_1, s_2) & \geq 0 & & \end{array}$$

を考える．ここで，$e_1 \in R^{n_1}$ と $e_2 \in R^{n_2}$ はすべての要素が 1 となるベクトルである．集合 $\mathcal{F}^0$ が空ではないので，この条件式をみたす点が唯一つ存在し，それを解析的中心と呼ぶ．

2つのパラメータ $(\mu_1, \mu_2) > 0$ に対する条件

$$\begin{array}{lllcl} A_1 x_1 & & & = & b_1, \\ A_2 x_1 & +A_3 x_2 & & = & b_2, \\ A_1^T y_1 & +A_2^T y_2 & +s_1 & = & c_1, \\ & A_3^T y_2 & +s_2 & = & c_2, \\ X_1 s_1 & & & = & \mu_1 e_1, \\ & X_2 s_2 & & = & \mu_2 e_2 \\ & (x_1, x_2, s_1, s_2) & \geq 0 & & \end{array} \tag{4}$$

をみたす解も唯一つ存在するので，それを $w(\mu_1, \mu_2) := (x_1(\mu_1, \mu_2), x_2(\mu_1, \mu_2), y_1(\mu_1, \mu_2),$ $y_2(\mu_1, \mu_2), s_1(\mu_1, \mu_2), s_2(\mu_1, \mu_2))$ と表すことにする．この点も解析センターと呼ぶ．解析

センターの集合

$$\mathcal{S} := \Big\{ w(\mu_1, \mu_2) : (\mu_1, \mu_2) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \Big\}$$

は2次元曲面となるので，それをセンター曲面と呼ぶ．また，集合

$$\mathcal{P} := \Big\{ w(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 = \mu_2,\ (\mu_1, \mu_2) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \Big\}$$

はセンターパスとよばれる．

3 アルゴリズム

まず，アルゴリズムの概略を説明する．初期点として，あるパラメータ $\mu^0 > 0$ とセンタ $w(\mu^0, \mu^0)$ の近似点 w^0 が得られているとする．定数 $\gamma \in (0,1)$ に対して，$k = 0$ からはじめて，k が1増えるごとに μ^k の値が γ 倍になるように帰納的に $\mu^{k+1} = \gamma\mu^k$ と定める．このように定めた μ^k に対して，センター $w^k(\mu^k, \mu^k)$ を近似するように点 w^k を生成する．(詳しい手順については後に記す．) このとき，アルゴリズムにより生成される点列 $\{w^k : k = 0, 1, 2, \cdots\}$ はセンターパス上の点列 $\{w(\mu^k, \mu^k) : k = 0, 1, 2, \cdots\}$ を近似する．パラメータの更新式より，

$$\mu^k = \gamma^k \mu^0$$

であるので，$k \to \infty$ とすると，$\mu^k \to 0$ となり，センター $w(\mu^k, \mu^k)$ は線形計画問題の最適解に近づき，そのセンターの近似点 w^k も最適解の近似点となる．したがって，k が大きくなれば，十分な精度の近似解を求めることができる．

センターの近似点 w^k から次のセンターの近似点 w^{k+1} を計算する手順を説明する．手順は二段階からなる．まず点 w^k から第1のパラメータ μ_1 のみの値を減少させたセンター曲面 S 上の点 $w(\mu^{k+1}, \mu^k)$ の近似点 w' を求め (ステップ 1)，次に，その点からセンター $w(\mu^{k+1}, \mu^{k+1})$ の近似点を求める (ステップ 2)．

アルゴリズムの手順を簡単に説明すると次のようになる．

[アルゴリズムの概略]

1. $\mu^0 > 0$ に対するセンター $w(\mu^0, \mu^0)$ の近似点 w^0 が得られているとする．
   $\gamma \in (0,1)$ を定める．$k = 0$ とする．
2. $\mu^{k+1} = \gamma\mu^k$ と更新する．w^k からセンター $w(\mu^{k+1}, \mu^k)$ を定める方程式系に対するニュートン法を適用することにより，$w(\mu^{k+1}, \mu^k)$ の近似点 $w' := (x'_1, x'_2, y'_1, y'_2, s'_1, s'_2)$ を求める．
3. w' からセンター $w(\mu^{k+1}, \mu^{k+1})$ の近似点 w^{k+1} をニュートン法を用いて求める．(詳細は後述する．)

4. 終了基準をみたしているときは終了する．そうでないときは $k=k+1$ として，ステップ 1に戻る．

以下で，ステップ 1, ステップ 2の詳細を解説する．

3.1 ステップ 1について

アルゴリズム中のステップ 1では，センター曲面上の点 $w(\mu^{k+1},\mu^k)$ を定義している方程式系 (4) にニュートン法を適用することにより，その近似点を求める．すなわち，w^k におけるニュートン方向 $\Delta w := (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta s_1, \Delta s_2)$ は，線形等式系

$$
\begin{array}{llll}
A_1\Delta x_1 & & & = b_1 - A_1 x_1^k,\\
A_2\Delta x_1 & +A_3\Delta x_2 & & = b_2 - A_2 x_1^k - A_3 x_2^k,\\
A_1^T\Delta y_1 & +A_2^T\Delta y_2 & +\Delta s_1 & = c_1 - A_1^T y_1^k - A_2^T y_2^k - s_1^k,\\
 & A_3^T\Delta y_2 & +\Delta s_2 & = c_2 - A_3^T\ y_2^k - s_2^k,\\
 & S_1^k\Delta x_1 & +X_1^k\Delta s_1 & = \mu^{k+1} e_1 - X_1^k s_1^k,\\
 & S_2^k\Delta x_2 & +X_2^k\Delta s_2 & = \mu^k e_2 - X_2^k s_2^k,
\end{array}
$$

の解として与えられる．ステップサイズを 1 として，次の点 w' を

$$
\begin{array}{rcl}
w' & := & (x_1', x_2', y_1', y_2', s_1', s_2')\\
 & = & (x_1^k, x_2^k, y_1^k, y_2^k, s_1^k, s_2^k) + (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta s_1, \Delta s_2)
\end{array}
$$

とする．

3.2 ステップ 2について

ステップ 2では，w' からセンター $w(\mu^{k+1},\mu^{k+1})$ の近似点 w^{k+1} を求める．ステップ 2では，変数ベクトル x_1 をステップ 1で求めた x_1' に固定する．問題の制約式中の行列 A_3 がブロック対角であるので，主問題は複数の小さな子問題に分割できる．もとの線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\min & c_1^T x_1 + c_2^T x_2,\\
\text{s.t.} & A_1 x_1 = b_1,\\
 & A_2 x_1 + A_3 x_2 = b_2,\\
 & (x_1, x_2) \geq 0
\end{array}
\qquad (5)
$$

において，変数 x_1 をステップ1で計算した x'_1 に固定すると，問題

$$\begin{array}{ll} \min & c_1^T x'_1 + c_2^T x_2, \\ \text{s.t.} & A_1 x'_1 \quad = b_1, \\ & A_2 x'_1 + A_3 x_2 = b_2, \\ & (x_1, x_2) \geq 0 \end{array}$$

が得られる．この問題は，x'_1 が定数ベクトルであるから，$b'_2 := b_2 - A_2 x'_1$ とすると線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \min & c_2^T x_2, \\ \text{s.t.} & A_3 x_2 = b'_2, \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

と等価である．(目的関数値は定数 $c_1^T x'_1$ だけ異なる．) 行列 A_3 が対角行列であるので，上の問題は $i = 1, 2, \cdots, N$ に対する次の N 個の問題

$$\begin{array}{ll} \min & p_i q_i^T y_i, \\ \text{s.t.} & W_i y_i = (b'_2)_i \quad (= h_i - T_1 x'_1), \\ & y_i \geq 0 \end{array} \tag{6}$$

に分割できる．

この問題の双対問題は

$$\begin{array}{ll} \max & ((b'_2)_i)^T u_2, \\ \text{s.t.} & W_i^T u_2 + v_2 = p_i q_i, \\ & v_2 \geq 0 \end{array} \tag{7}$$

であり，最適条件は

$$\begin{array}{rcl} W_i y_i & = & (b'_2)_i, \\ W_i^T u_2 + v_2 & = & p_i q_i, \\ Y_i v_2 & = & 0, \\ (y_i, v_2) & \geq & 0 \end{array}$$

である．またパラメータ $\mu > 0$ に対して，主問題 (6) と双対問題 (7) の組のセンターは線形等式系

$$\begin{array}{rcl} W_i y_i & = & (b'_2)_i, \\ W_i^T u_2 + v_2 & = & p_i q_i, \\ Y_i v_2 & = & \mu e, \\ (y_i, v_2) & \geq & 0 \end{array} \tag{8}$$

をみたす点 (y_i, u_2, v_2) である．ステップ 1 で求めた解の部分ベクトル $((x_2')_i, (y_2')_i, (s_2')_i)$ は，$\mu = \mu^k$ のときの (8) をみたすセンターの近似点となっている．

したがって，それぞれの分割された主問題 (6) と双対問題 (7) に内点法を適用することにより，$\mu = \mu^{k+1}$ のときの (8) をみたすセンターの近似点を計算することができる．ここでの計算は，分割された問題への内点法であるので，その計算量はステップ 1 に比べはるかに少なくなる．

このようにして，成分ごとに点を更新することにより計算した点を $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{s}_2)$ とすれば，等式条件

$$\begin{aligned} A_1 x_1 \quad & \quad = b_1, \\ A_2 x_1 + A_3 x_2 & \quad = b_2, \\ A_3^T y_2 + s_2 & \quad = c_2, \end{aligned}$$

を正確にみたし，

$$\begin{aligned} X_1 s_1 &= \mu^{k+1} e_1, \\ X_2 s_2 &= \mu^{k+1} e_2 \end{aligned}$$

を近似的にみたす点 $\bar{w} := (x_1', \bar{x}_2, y_1', \bar{y}_2, s_1', \bar{s}_2)$ を求めることができる．しかし，センターを定義する条件のうち

$$A_1^T y_1 + A_2^T y_2 + s_1 = c_1 \tag{9}$$

を近似的にみたすかどうかについては不明である．そこで，もし $(x_1', \bar{x}_2, y_1', \bar{y}_2, s_1', \bar{s}_2)$ が上の条件 (9) をみたすならば，ステップ 2 を終了する．さもなければ，

$$\bar{y}_1 := \arg\min_{y_1} \|(S_1')^{-1}(A_1^T y_1 + A_2^T \bar{y}_2 + s_1' - c_1)\|_2 \tag{10}$$

を計算する．もし $(x_1', \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, s_1', \bar{s}_2)$ が条件 (9) を近似的にみたす，すなわち小さな定数 $\Delta > 0$ に対して，$\|(S_1')^{-1}(A_1^T \bar{y}_1 + A_2^T \bar{y}_2 + s_1' - c_1)\|_2 \leq \Delta$ をみたすならば，ステップ 2 を終了する．最後に制約 (9) をみたすように親問題 (5) において，ニュートン法を行い，センター $(w(\mu^{k+1}, \mu^{k+1}))$ の近似点を得て，ステップ 2 を終了する．

4 アルゴリズムの解析

[定理 1] $\mathrm{Range}(A_2^T) \subset \mathrm{Range}(A_1^T)$ と仮定する．ステップ 1 で生成された点 w' の部分ベクトル $({y'}_1, {y'}_2, s_1')$ が問題 (2) の実行可能点であるとする．このとき，ステップ 2 で生成された点 $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, s_1')$ は条件

$$A_1^T \bar{y}_1 + A_2^T \bar{y}_2 + s_1' = c_1$$

をみたす.

[証明] ステップ 1 で計算された w' が実行可能であることから,

$$A_1^T y_1' + A_2^T y_2' + s_1' = c_1.$$

仮定より, Range(A_2^T) ⊂Range(A_1^T) であるから, y_2' を固定して考えると, 任意の $\bar{y}_2$ に対して,

$$A_2^T(y_2' - \bar{y}_2) = A_1^T \tilde{y}_1$$

をみたす $\tilde{y}_1$ が存在する. この $\tilde{y}_1$ を用いて, $\bar{y}_1 = y_1' + \tilde{y}_1$ とすると,

$$\begin{aligned} A_1^T \bar{y}_1 + A_2^T \bar{y}_2 + s_1' &= A_1^T(y_1' + \tilde{y}_1) + A_2^T \bar{y}_2 + s_1' \\ &= A_1^T y_1 + A_2^T(y_2' - \bar{y}_2) + A_2^T \bar{y}_2 + s_1' \\ &= A_1^T y_1 + A_2^T y_2' + s_1' \\ &= c_1 \end{aligned}$$

となる. したがって, $\bar{y}_1$ は問題 (10) の解である. また, $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, s_1')$ は等式 (9) をみたす. (証明終)

パラメータ $\beta \in (0,1)$ に対して実行可能点からなるセンターの近傍

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\beta(\mu_1, \mu_2) \ := \ &\Big\{ (x_1, x_2, y_1, y_2, s_1, s_2) \in \mathcal{F} : \\ &\Big\| (X_1 s_1 - \mu_1 e_1,\ X_2 s_2 - \mu_2 e_2) \Big\|_2 \le \beta \min\{\mu_1,\ \mu_2\} \Big\} \end{aligned}$$

を定義する.

次の補題は, 内点法でよく使われる不等式であり, 後の定理の証明で使う.

[補題 1] $u^T v \ge 0$ をみたす u と $v \in R^n$ に対して, 次の関係が成り立つ.

$$\Big\| Uv \Big\|_2 \le \frac{\sqrt{2}}{4} \Big\| u + v \Big\|_2^2. \tag{11}$$

[定理 2] n_1 を変数 x_1 の次元とし, 点 w^k をセンター $w(\mu^k, \mu^k)$ の近傍 $\mathcal{N}_\beta(\mu^k, \mu^k)$ 上に存在する点とする. すなわち,

$$w^k \in \mathcal{N}_\beta(\mu^k, \mu^k).$$

もし $\delta > 0$ と $\beta \in (0,1)$ が

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{(\delta + \beta)^2}{(1-\beta)(1-\delta)} \le \beta \tag{12}$$

をみたすならば, このとき $\gamma = (1 - \delta/\sqrt{n_1})$ としてステップ 1 で生成される点 $w' := (x_1', x_2', y_1', y_2', s_1', s_2')$ は, センター $w(\mu^{k+1}, \mu^k)$ の近傍 $\mathcal{N}_\beta(\mu^{k+1}, \mu^k)$ 上に存在する, すなわち

$$w' \in \mathcal{N}_\beta(\mu^{k+1}, \mu^k)$$

である．

特に $\beta = 1/4$ で $\delta = 1/4$ とすると上の条件をみたす．

[証明] ニュートン方向 $\Delta w = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta s_1, \Delta s_2)$ は，次の方程式の解として与えられる．

$$\begin{array}{llllll} A_1\Delta x_1 & & & & = & b_1 - A_1 x_1^k, \\ A_2\Delta x_1 & +A_3\Delta x_2 & & & = & b_2 - A_2 x_1^k - A_3 x_2^k, \\ A_1^T\Delta y_1 & +A_2^T\Delta y_2 & & +\Delta s_1 & = & c_1 - A_1^T y_1^k - A_2^T y_2^k - s_1^k, \\ & A_3^T\Delta y_2 & & +\Delta s_2 & = & c_2 - A_3^T\ y_2^k - s_2^k, \\ & S_1^k\Delta x_1 & & +X_1^k\Delta s_1 & = & \mu^{k+1}e_1 - X_1^k s_1^k, \\ & S_2^k\Delta x_2 & & +X_2^k\Delta s_2 & = & \mu^k e_2 - X_2^k s_2^k. \end{array} \tag{13}$$

以下で次の不等式が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned} C_1 &:= \left\| \left((X_1^k + \Delta X_1)(s_1^k + \Delta s_1) - \mu^{k+1}e_1, (X_2^k + \Delta X_2)(s_1^k + \Delta s_1) - \mu^k e_2\right\|_2 \\ &\leq \beta \min\{\mu^{k+1}, \mu^k\}. \end{aligned} \tag{14}$$

$\min\{\mu^{k+1}, \mu^k\} = \mu^{k+1}$ に注意すると次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} C_2 &:= \left\|\left((X_1^k S_1^k)^{-1/2}(\mu^{k+1}e_1 - X_1^k s_1^k), (X_2^k S_2^k)^{-1/2}(\mu^k e_2 - X_2^k s_2^k)\right)\right\|_2 \\ &\leq \left\|\left((X_1^k S_1^k)^{-1/2}(\mu^{k+1} - \mu^k)e_1, 0\right)\right\|_2 \\ &\quad \left\|\left((X_1^k S_1^k)^{-1/2}(\mu^k e_1 - X_1^k s_1^k), (X_2^k S_2^k)^{-1/2}(\mu^k e_2 - X_2^k s_2^k)\right)\right\|_2 \\ &\leq \frac{(\mu^k - \mu^{k+1})\sqrt{n_1}}{\sqrt{(1-\beta)\mu^k}} + \frac{\beta\mu^k}{\sqrt{(1-\beta)\mu^k}} \quad (w^k \in \mathcal{N}_\beta(\mu^k, \mu^k) \text{ より}) \\ &\leq \frac{(\delta+\beta)}{\sqrt{1-\beta}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\delta}{\sqrt{n_1}}}} \sqrt{\mu^{k+1}} \quad \left(\mu^k = \frac{1}{1-\delta/\sqrt{n_1}}\mu^{k+1},\ \gamma = (1-\delta/\sqrt{n_1}) \text{ より}\right) \\ &\leq \frac{(\delta+\beta)}{\sqrt{(1-\beta)(1-\delta)}}\sqrt{\mu^{k+1}} \end{aligned}$$

さらに次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} C_1 &= \|(\Delta X_1\Delta s_1, \Delta X_2\Delta s_2\|_2 \quad ((13) \text{ より}) \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{4}\left\|\left((X_1^k S_1^k)^{-1/2}(\mu^{k+1}e_1 - X_1^k s_1^k), (X_2^k S_2^k)^{-1/2}(\mu^k e_2 - X_2^k s_2^k)\right)\right\|_2^2 \quad ((11), (13) \text{ より}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}C_2^2 \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{(\delta+\beta)^2}{(1-\beta)(1-\delta)}\mu^{k+1}. \end{aligned}$$

したがって $C_1 \leq \beta\mu^{k+1}$ となり，これは (14) が成り立つことを示す．

変数の非負性も次のように成り立つ．変数 x の添え字集合を I とする．$i \in I$ に対して，$\psi_i(0), \psi_i(1) > 0$ をみたす二次関数 $\psi_i(\alpha) := x_i s_i + \alpha(x_i \Delta s_i + s_i \Delta x_i) + \alpha^2 \Delta x_i \Delta s_i$ を考える．ある i と $\alpha \in (0,1)$ が存在して，$\psi_i(\alpha) \leq 0$ が成り立つと仮定する．すると二次関数 ψ_i は凸でなければならない．ところが次の不等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\psi_i(\alpha) &\geq x_i s_i + \alpha(x_i \Delta s_i + s_i \Delta x_i) \\
&= (1-\alpha)\psi(0) + \alpha\mu_i \quad ((13)\text{ より}) \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

これは矛盾である．したがって，$w^k \in \mathcal{N}_\beta(\mu^k, \mu^k)$ ならば，$w' \in \mathcal{N}_\beta(\mu^{k+1}, \mu^k)$ となる．

あきらかに $\beta = 1/4$, $\delta = 1/4$ とすると定理の条件 (12) をみたす．（証明終）

最適解を得るには，μ として 2^{-L} とすれば十分である．この条件をみたすには上の定理より $O(\sqrt{n_1}L)$ 反復が必要である．定理としてまとめると次のようになる．

[定理 3] 問題 (2) が定理 1 の条件をみたし，初期点が近傍 $\mathcal{N}_\beta(\mu^0, \mu^0)$ に存在するならば, $O(\sqrt{n_1}L)$ 反復以内で問題を解くことができる．

5 結論と今後の課題

本論では，有限個のシナリオからなる 2 期間確率計画問題と等価な線形計画問題を解く内点法を提案した．この線形計画問題は，係数行列の右上部分が 0 行列であり，その右下部分が対角行列となるという特徴を持つ．

この問題の特徴を利用し，2 つのパラメータに対する解析センターを定義し，その全体集合であるセンター曲面上の点列を追跡することにより，問題を解くアルゴリズムを提案した．具体的には，2 つのパラメータを交互に減少させるアルゴリズムであり，従来の方法に比べ，一度にパラメータ値を大幅に改善できることを示した．

参考文献

[1] Birge, J. and Louveaux, F.: *Introduction to Stochastic Programming*, Springer, New York (1997).

[2] Karmarkar, N.: "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming", *Combinatorica* **4** (1984) 373-395.

[3] Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A.: "A Primal-Dual Interior Point Algorithm for Linear Programming", *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods* (ed. N. Megiddo) Springer, New York (1989) 29-47.